MATHEMATIQUES

(OPTION AGRONOMIE - OPTION BIOCHIMIE-BIOLOGIE)

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 3 heures

Seules les questions (2.5) et (2.6) utilisent des résultats de la première partie.

Si X désigne une variable aléatoire, $\mathbb{P}(X = A)$ désignera la probabilité de l'événement $X = A$.

$\mathbb{P}(X = A / Y = B)$ désigne la probabilité de l'événement $X = A$, conditionnellement à l'événement $Y = B$.

1 - On dispose de N boules numérotées de 1 à N, réparties en deux urnes U_1 et U_2. On suppose $N \geq 3$; soit $\gamma \in]0,1[$.

On procède à des expériences (E) selon le déroulement suivant :

(E) consiste à :
- * choisir un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1 \ldots N\}$ de manière à ce que tous les nombres aient la même probabilité d'être tirés
- * la boule dont le numéro a été tiré est alors changée d'urne avec la probabilité γ ; on la maintient dans la même urne avec la probabilité $1 - \gamma$.

On répète l'expérience (E) indéfiniment, en une suite $\{E_1, E_2, \ldots E_n \ldots\}$ de manière à ce que les tirages de chaque expérience soient indépendants des tirages précédents.

X_n , pour $n \in \mathbb{N}$, désigne la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après réalisation de la n-ième expérience E_n .

1.1 - On suppose ici qu'au départ, toutes les boules sont dans l'urne U_1 .

a) Déterminer la loi de X_1 (elle ne peut prendre que deux valeurs).

b) Vérifier que X_2 ne peut prendre que les valeurs N-2, N-1, N.
Calculer $\mathbb{P}(X_2 = N-2/ X_1 = N-1)$ $\mathbb{P}(X_2 = N-1/ X_1 = N)$
$\mathbb{P}(X_2 = N-1/ X_1 = N-1)$ $\mathbb{P}(X_2 = N / X_1 = N)$
$\mathbb{P}(X_2 = N / X_1 = N-1)$

En déduire la loi de X_2 .

1.2 - On suppose ici, qu'au départ, il y a N_0 boules dans l'urne U_1 , où $N_0 \in \{0 \ldots N\}$.
Déterminer les valeurs possibles pour X_{n+1} , sachant que $X_n = k$, en discutant suivant k .

Calculer $p_{\ell k} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell / X_n = k)$ pour toutes les valeurs de ℓ et k dans $\{0, 1, \ldots, N\}$. Vérifier que $p_{\ell k}$ ne dépend pas de n.

Quelles sont les valeurs possibles pour X_n , en fonction de n et de N_0.

1.3 - Soit M la matrice carrée d'ordre $N + 1$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & - & - & - & - & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & - & - & - & - & p_{1N} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & - & - & - & - & p_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & - & - & - & - & p_{NN} \end{pmatrix}$$

Vérifier que la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1 .

Soit Π_n le vecteur colonne de dimension $N + 1$, défini par

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur Π_n définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

Montrer que $\Pi_{n+1} = M\Pi_n$.

1.4 - On suppose ici $N = 3$, et $\gamma = \frac{1}{2}$.

Déterminer numériquement la matrice M .

Tournez la page S. V. P.

2 - L'espace $\mathbb{R}^4$ est supposé rapporté à la base canonique

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit M la matrice carrée d'ordre 4 à coefficients réels positifs ou nuls,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.1 - Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.
On note les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$.

2.2 - Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de M. On note V_i un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i, pour $i = 1, \ldots, 4$.
Ecrire la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3, V_4)$. On choisira les composantes des V_i de façon que les éléments de la première ligne de P soient tous égaux à 1. Calculer D, la matrice diagonale semblable à M dans ce changement de base.

2.3 - Calculer M^n en fonction de P, P^{-1} et D.
On ne calculera pas P^{-1}.

2.4 - On pose $\Pi_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $\Pi_{n+1} = M\,\Pi_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose $a_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$ et $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de Π_n sont positifs ou nuls et que leur somme est égale à 1.

b) On note $\Pi'_0, \ldots, \Pi'_n$ les vecteurs colonnes correspondant aux vecteurs $\Pi_0, \ldots, \Pi_n$ dans la base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.

On pose $\Pi'_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$. On ne calculera pas a_1, a_2, a_3, a_4.

Calculer Π'_n, $\lim_{n\to+\infty} \Pi'_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \Pi_n$, en fonction de a_1, a_2, a_3, a_4.

En utilisant la question (2.4 - a), terminer le calcul de $\lim_{n\to+\infty} \Pi_n$.

2.5 - Dans les questions (2.5) et (2.6), Π_0, Π_n, M représentent les vecteurs colonnes et la matrice définis dans la partie 1.

Calculer le vecteur Π_0 représentant l'état initial suivant : l'urne U_1 contient i boules ($i \in \{0,1,2,3\}$).

2.6 - Montrer en utilisant la question (2.4 - b), que, quel que soit l'état initial représenté par Π_0,

$$\Pi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Pi_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Soit X_∞ la variable aléatoire définie par Π_∞, c'est à dire telle que :

$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(X_\infty = 1) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X_\infty = 2) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X_\infty = 3) = \frac{1}{8}$

Quelle est cette loi de probabilité ?

Calculer son espérance et sa variance.

Pouvait-on s'attendre au résultat obtenu ?